

Selected Article

一般論文

一定断面毛細管現象の過渡的挙動解析

大槻 聡

掘場製作所製品化設計センター情報技術部CAD・CAEチームでは、CAEによる数値シミュレーションを用いた実製品における設計計算を業務の一つとして行っている。その思想は、CAEは設計のためのツールであり、重要なのはその計算結果からどれだけ工学的知見と設計の方向性を見出せるかとしている。このために計算式を構成している基礎機械工学を十分に理解し、また多様化する設計からの要求にいつでも対応できるよう常に研鑽を続ける必要がある。今回はこのような業務を通じた基礎機械工学の観点から、CAEを用いる前の理論解析により工学的知見を得、更にこれをCAEにより検証を行った一例として、一定断面毛細管現象の過渡的挙動解析を紹介する。

はじめに

分析計の中には、毛細管による毛細管現象を利用して、被計測物を分析計に集めるためのサンプリングを行うものがある。一般にサンプリング時間は短く、サンプルの量は少量であることが、分析計の仕様としては望ましい場合が多い。このため毛細管現象の基本的な特徴を理解しこれらを実現するために、重力の影響は無視した断面形状が一定の毛細管における毛細管現象の基本的な過渡的挙動を理論的に解析し、その理論解とCAEを用いた数値計算解とを比較し検証した。そしてその理論式を用いて毛細管現象の基本的な過渡的挙動の特徴を検証し、上記の仕様を満たすための方向性を示すことを試みた。

解析モデル及び各パラメータ

図1に今回の過渡的挙動の解析を行ったモデルの概念図を示す。まず長手方向に一定の、細長い矩形断面を持つ毛細管について解析した。

使用するパラメータは以下の通りである。

- h : 毛細管現象により吸引された液高さ [m]
- a : 矩形断面の長辺の長さ [m]

- b : 矩形断面の短辺の長さ [m]
- D : 円形断面の直径 [m]
- ρ : 液の密度 [m^3/kg]
- σ : 液の表面張力 [N/m]
- θ : 液の接触角 [$^\circ$]
- μ : 液の粘性係数 [$\text{Pa}\cdot\text{s}$]
- t : 時間 [s]

実際は液の先端は表面張力により曲率を持つが、簡単のため図1では液先端の曲率を省略している。

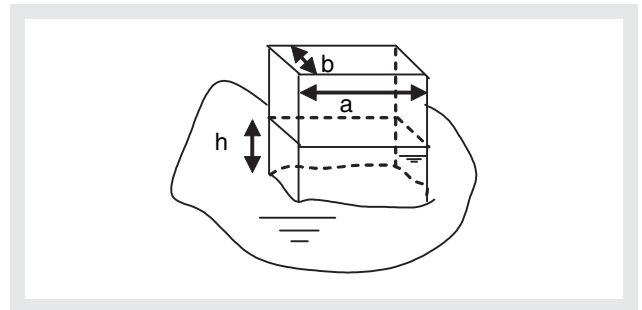


図1 概念図

重力と摩擦の影響なしの場合

運動方程式とその解

まず毛細管現象の基本的な過渡的挙動を理解するために、毛細管現象の駆動力の妨げとなる液と管内壁との摩擦力、及び重力の影響(毛細管を重力逆方向に立てた場合)を無視した場合の解析をする。

管下端は大きな液溜めに接しており、管下端から下の部分の液の動きは遅く、その運動量は無視できるものとする。時刻 $t=t$ において液が管下端から h の高さまで吸引されているとする。一定断面・非圧縮で連続の式を考慮すると、管内部の液の管断面平均速度は高さにかかわらず一定となり、その大きさは以下となる。

$$\text{液平均速度} = \dot{h} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\dot{}$ は時間に関する微分を表すものとする。従って、管内の液全体の運動量は以下となる。

$$\text{管内液全体の運動量} = abh\dot{h} \quad \dots\dots\dots (2)$$

また駆動力となる表面張力による力は以下となる。

$$\text{駆動力} = 2(a+b)\sigma\cos\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

式(2)(3)より、ニュートンの運動の法則から次が成り立つ。

$$\frac{d}{dt}(abh\dot{h}) = 2(a+b)\sigma\cos\theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{今 } A = \frac{2(a+b)\sigma\cos\theta}{ab\rho} \quad \dots\dots\dots (5)$$

とおくと、 A は時間に依存しない定数となる。よって式(4)は以下のように書き換えられる

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}h^2\right) = A \quad \dots\dots\dots (6)$$

h は正数であることを考慮しながら式(6)を2回積分すると、以下のように h が時間の関数として得られる。

$$h = \sqrt{A(t+c_2)^2 + c_1} \quad \dots\dots\dots (7)$$

c_1, c_2 は積分定数

よって、液先端の速度は以下となる。

$$\dot{h} = \frac{A(t+c_2)}{h} \quad \dots\dots\dots (8)$$

重力と摩擦がない場合の過渡的挙動の特徴

式(8)において $t \rightarrow \infty$ とすると、

$$h \rightarrow \sqrt{A}(t+c_2) \quad \dots\dots\dots (9)$$

となり、右辺は時間に比例して h が増加していくことがわかり、これは速度が一定であることを意味する。つまり液面の速度は時間と共に一定速度の \sqrt{A} に近づくことがわかる。

式(8)から $t=0$ で速度が ∞ になることを回避するため、 $t=0$ に仮に長さ L [m]の液が、初速度=0で管内に存在していたとすると、積分定数は $c_1=L^2, c_2=0$ となる。例えば $t=0$ で $L=3$ mm、液面速度=0として、式(7)(8)をグラフにしたものを図2に示す。三角が液面高さ、丸が液面速度を表している。液は水を使用し、各パラメータとして次を用いた。

$a=1e-3, b=2e-4, \rho=998, \sigma=7.28e-2$,
この時、 \sqrt{A} は式(5)より次の値となる。

$$\sqrt{A} = 0.9353 \quad \dots\dots\dots (10)$$

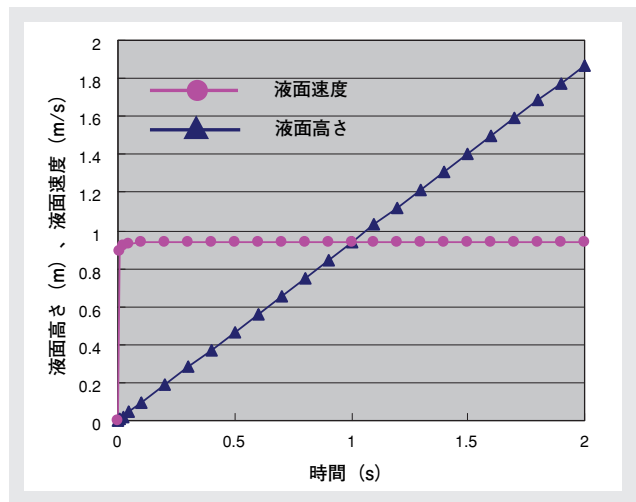


図2 矩形断面一定毛細管現象の過渡応答(重力、粘性の影響なしの場合)

参考までに図2に対し L の値を3 mmから0.01 mmまで減少させたが、 L の値は $t=0$ 直後の極短い時間の液先端の速度の立ち上がりの方に影響し、特に液高さ h にはほとんど影響がないことがわかった。よって一般的に、速度は瞬時にして \sqrt{A} に達した後、液先端は一定速度 \sqrt{A} で移動す

るとみなせることがわかる。

これまでの議論は、一定断面を持つ円管についても同様に展開することができ、円管内径を d [m]とすると、この場合の \sqrt{A} は以下の式(11)で表される。

$$\sqrt{A} = \sqrt{\frac{4\sigma\cos\theta}{D\rho}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

以上から、まず重力と摩擦の影響を無視した基本的な表面張力のみ毛細管現象は、一定速度で先端が移動する傾向を持つと言える。また摩擦力、及び重力(毛細管を重力逆方向に立てた場合)は共に液面の移動を妨げる方向であるため、この \sqrt{A} は理想的な毛細管現象の速度であり、 $t=0$ 直後の瞬間を除けば、毛細管現象の最大速度を与えたと考えられる。従って、毛細管現象を利用した一定断面のサンプリング装置では、速度 \sqrt{A} が必要とされる時間より短い時間でのサンプリングは困難であることがわかる。

摩擦を考慮した場合

運動方程式とその解

次に重力と摩擦の影響なしの解に液の粘性による摩擦の影響を加味する。毛細管自身はもともと流路の代表長さが小さい上に液速度もあまり大きくないため、その液の内部流れは層流状態になっていると考えられる。従って層流流量計などに見られるようにその摩擦力は流量、すなわち流速に比例すると考えられる。また液先端が時間と共に移動すると、管内壁に接触する液の面積も時間と共に増加することから、管内の液に作用する摩擦力はその時刻の液高さにも比例すると考えられる。従って摩擦力はその時刻における液先端の速度と高さに比例すると考えられる。

今の場合、細長い矩形断面から $a \gg b$ とすると、液の粘性による摩擦力は、無限平行平板間の隙間の一方向流れの摩擦力とみなせる。よって非圧縮性定常層流理論を適用すると、図1における高さ h の部分の液にかかる摩擦力は以下となる。

$$\text{摩擦力} = \frac{12a\mu}{b} h\dot{h} \quad \dots\dots\dots (12)$$

以上から、摩擦を考慮した場合の式(4)に相当する運動

方程式は以下となる。

$$\frac{d}{dt}(ab\rho h\dot{h}) = -\frac{12a\mu}{b} h\dot{h} + 2(a+b)\sigma\cos\theta \quad \dots\dots\dots (13)$$

今

$$B = \frac{12\mu}{b^2\rho} \quad \dots\dots\dots (14)$$

とおくと、 B は時間に依存しない定数となる。よって式(5)の A を用いると式(13)は以下のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dt}(h\dot{h}) = -Bh\dot{h} + A \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで

$$h\dot{h} = X \quad \dots\dots\dots (16)$$

とおくと、運動方程式(13)は次のように書き換えられる。

$$\frac{dX}{dt} = -BX + A \quad \dots\dots\dots (17)$$

これは、 X についての変数分離型であり X について解くことができるため、 h についても解くことができる。

h は正数であることを考慮すると、その解は以下となる。

$$h = \sqrt{\frac{2}{B^2} \exp(-Bt+c_3) + \frac{2A}{B} t + c_4} \quad \dots\dots\dots (18)$$

c_3, c_4 は積分定数

よって、液先端の速度は以下となる。

$$\dot{h} = \frac{-\frac{1}{B} \exp(-Bt+c_3) + \frac{A}{B}}{h} \quad \dots\dots\dots (19)$$

摩擦を考慮した場合の過渡的挙動の特徴

式(18)の $\sqrt{\quad}$ 内の第二項はLucas-Washburnの式^[1](以下L-Wの式と略記する)に相当し、 $t \rightarrow \infty$ でL-Wの式に漸近していくことがわかる。

重力と摩擦の影響がない場合と同様に $t=0$ で $h=L$ 、初速度 $=0$ とすると、積分定数は $c_3 = \ln A$ 、 $c_4 = L^2 - 2A/B^2$ となり、同様に $t=0$ において、 $L=3$ mm、液先端速度 $=0$ の条件

で式(18)(19)をグラフにしたものを図3に示す。三角が液面高さ、丸が液面速度を表している。各パラメータは重力と摩擦の影響がない場合と同一で以下である。

$$a=1e-3, b=2e-4, \rho=998, \sigma=7.28e-2,$$

特徴としては、液先端の速度はt=0の直後に急激に立ち上がるが、そのピーク値は上記の理想速度 \sqrt{A} の半分程度である。そしてその後摩擦の影響により速度が下がっていく。液先端速度と \sqrt{A} との差を摩擦の影響とみなすと、大きく摩擦の影響を受けていることがわかる。

Lの値を3 mmから0.01 mmまで減少させた時、速度のピーク値はLの減少と共に上がり、L=0.01 mmの時約0.65と \sqrt{A} の約70%まで上がるが、全体傾向としてはt=0直後の立ち上がりの勾配が急峻になるのみなど、重力と摩擦の影響がない場合と同様の傾向であった。更にa, bの値を変化させても図3のプロファイルはほとんど同様であった。

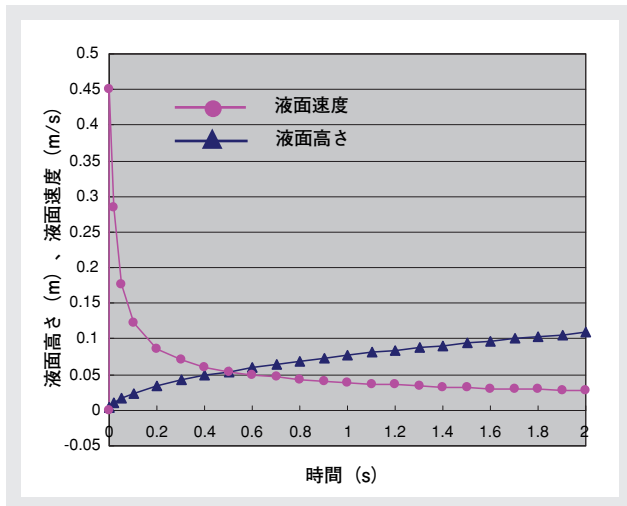


図3 矩形断面一定毛细管現象の過渡応答(摩擦考慮, 重力の影響なしの場合)

矩形断面のa, bのパラメータが液先端の速度にどのような影響を及ぼすのかを見るために、以上を考慮し例えばt=2における液先端の速度を評価値として検証を行った。L=3 mmは固定、aの検証時にはb=0.2 mm, bの検証時にはa=1 mmと固定した。結果を図4, 図5に示す。

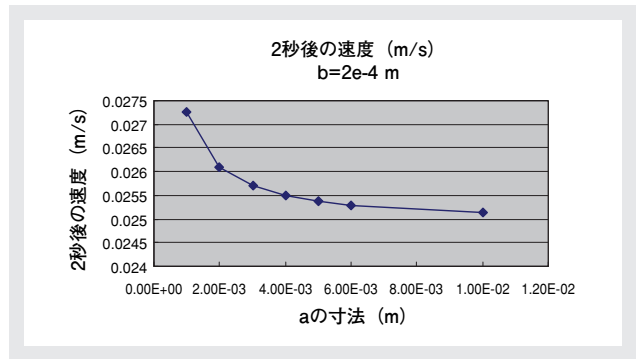


図4 aの検証結果

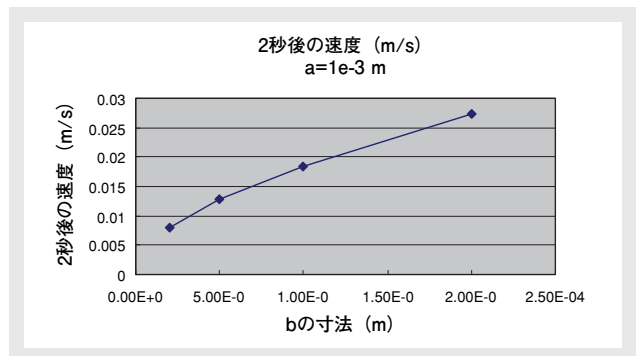


図5 bの検証結果

これらを見ると、傾向としてaは小さく、bは大きい方がサンプリング時間を短くするのに有利であることがわかる。細長い矩形断面を出発点としていることを考えると、上記の傾向はすなわち断面は正方形に近いほうが有利であることを示している。これは層流状態の細い管路では、速度分布が、よく知られる平行平板間の層流の流れで見られる放物線状の速度分布であるハーゲン・ポアズイユ流れとなり、速度分布が放物線状となる。そして、細い隙間方向に形成された放物線速度分布の壁面における勾配が、隙間が細ければ細いほど急峻になり、せん断力が大きくなることを考慮すると、最小隙間となる部分をできるだけなくすることにより摩擦力を低減できると考えられる。この観点を更に進めると、断面形状は円形が最も好ましいと考えられる。一定断面の円管についても同様に計算ができ、円管内径をd[m]とすると \sqrt{A} は式(11)と同一で、Bは以下となる。

$$B = \frac{32\mu}{D^2\rho} \dots\dots\dots (20)$$

円断面の時も図2, 図3に相当する過渡応答はほぼ同様の傾向が得られた。そこで次に円管の場合の、内径のパラメータ試験を同様に実施した。図6に結果を示す。

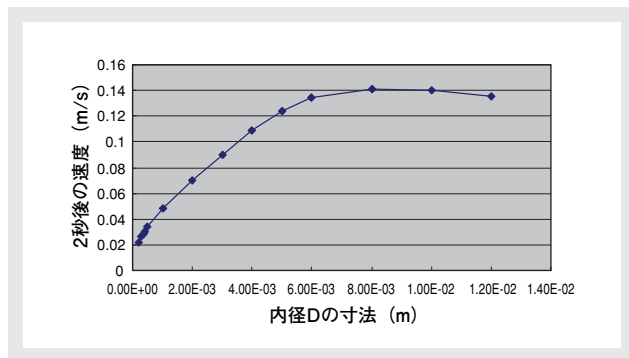


図6 2秒後の速度(m/s)円形断面

2秒後の速度は、 D が約8 mmの時にピーク値を持つことがわかる。これは D が小さいと摩擦力の影響が大きいが、 D が大きくなり過ぎると駆動力が D の1乗で大きくなるのに対し、牽引する質量は断面積、つまり D の2乗で大きくなるためと考えられる。重力の影響を無視するという事は例えば毛細管を横向けに使用することに相当し、水に対し内径8 mmの円管を横向けに安定して毛細管として使用できるのかという実用上の問題があるが、理論上円管に対し液面速度を最大とする最適内径が存在することがわかる。参考までに、内径8 mmの場合の図3に相当するグラフを図7に示す。この時の理想液面速度の \sqrt{A} は約0.17であることや図2との比較により、図3に比べ摩擦の影響をほとんど受けていないことがわかり、理論上は摩擦の影響を大きく排除できる可能性があることを示している。

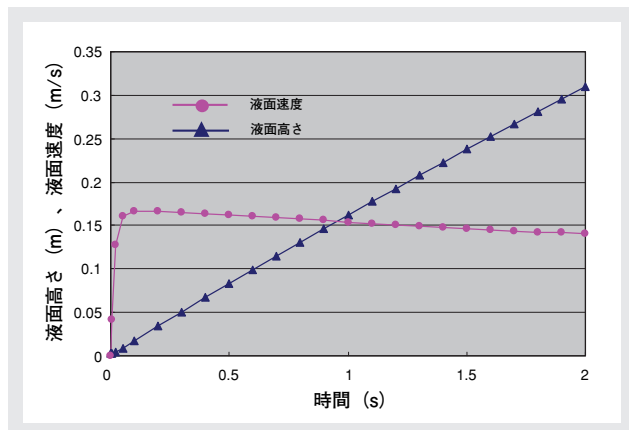


図7 円形断面一定毛細管現象の過渡応答(摩擦考慮、重力の影響なしの場合)

CAEによる理論解の検証

上記で求めた毛細管現象の過渡的挙動を記述する理論解を、断面一定の円管について有限体積法を用いたCAEを用いて検証した。ソフトは株式会社ソフトウェアクリエイドのSTREAM Ver3.14を使用した。自由表面の解析にはVOF法を用いている。内径=0.4 mm, $t=0$ における初期高さ $L=3$ mm, 初速度=0 m/s, $\rho=998$ kg/m³, $\sigma=7.28e-2$ N/m, 接触角は θ を用いた。図8に、例えば $t=0.01$ 秒における管内速度分布と液先端の状態拡大図を示す。対称性から右半分を示しており、液は上向きに進んでいる。液先端の界面形状の図はVOF(水の体積分率)の0.5の部分を取った等高線図で示している。速度分布図中の横線は初期液高さ3 mmを示す。

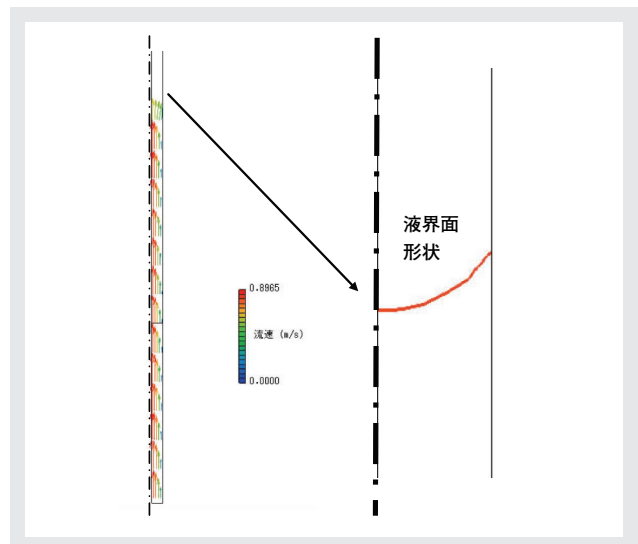


図8 管内速度分布と液先端の状態拡大図

図9, 図10に $t=0$ から0.2秒の間の液の高さ、及び液先端の速度の過渡応答のグラフを示す。CAEでの速度は高さ3 mmの断面における平均速度をとった。

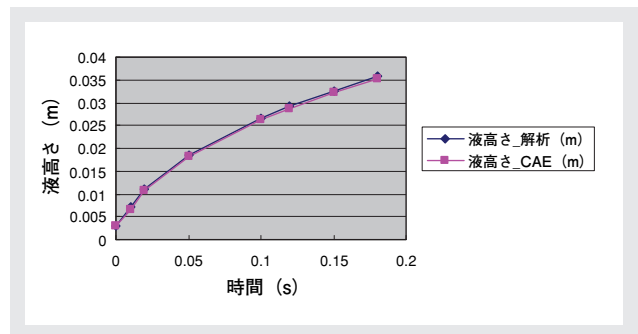


図9 円形一定断面毛細管(重力なし)の非定常応答_液高さ

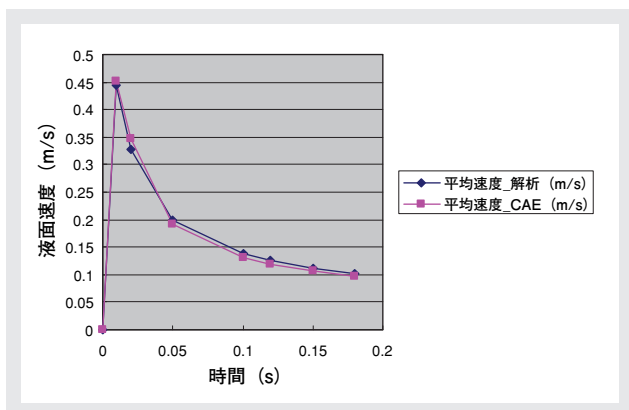


図10 円形一定断面毛細管(重力なし)の非定常応答_液速度

液高さの過渡応答はCAEと良好な一致を示しており、また液先端の速度は、初速度0から急峻に立ち上がりその後減衰していく様子まで今回の解析結果とCAE結果がよく一致している。また、逆にCAEでの解がオーバーシュートをして減衰していく様子は、今回の理論解析から数値誤差・不安定の類ではなく、物理現象であることが検証される。このオーバーシュートはL-Wの式では、内径が大きい、または粘性が小さい時は図10のものよりも大きくなる傾向があるが、内径が1 mmより小さい時、ないしは内径が3 mmでも粘性が水の10倍になるとL-Wの式とよく一致する。これはL-Wの式は水よりも油の方が実験と一致する傾向があるとの報告もあるが、内径と密度が小さく粘性が大きいほど、式(18)の√内の第一項が第二項に対し小さくなることと整合しているとも考えられる。

おわりに

毛細管現象では、重力がある場合はよく知られた

$$h = \frac{4\sigma\cos\theta}{\rho gD} \text{ (円管の時)} \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$h = \frac{2\sigma\cos\theta}{\rho gb} \text{ (平板間の時)} \quad \dots\dots\dots (22)$$

の高さで液が静止するため、サンプリング時間・量の検討以前にサンプリングそのものに限界があることから、今回例えば毛細管を横向きに使用した重力を考慮しない場合につき、矩形と円形の一定断面を持つ毛細管に対する毛細管現象の過渡的応答の理論的アプローチを試みた。そして運動方程式からその挙動を表す式を導き出し、Lucas-Washburnの式との関係を示すことも試みた。こ

の結果、1.毛細管現象によるサンプリング速度には最大値 \sqrt{A} (式(5))が存在すること。2.例えば液が水の場合、同じ断面積に対する矩形断面では、正方形がサンプリング時間を短くするのに有利であること、3.液が水の場合、円管に対してはサンプリング時間を短くするのに理論上最適な内径があることなどを解析した。以上の情報が毛細管による毛細管現象を用いた装置の開発に有用なものとなることを願う次第である。

参考文献

[1] E. W. Washburn, Phys. Rev. 17, 273 (1921).



大槻 聡
 Satoshi Ohtsuki
 株式会社堀場製作所
 製品化設計センター
 情報技術部
 CAD・CAE チーム
 ジョブリーダー